复数

孙长明

2010/10/29 13:17:10

Contents

1 复数域 1

1.1 复数的基本定义 1

1.2 数域的封闭性 1

1.2.1 加法 2

1.2.2 乘法 2

1.2.3 分配律 3

1.3 复数的代数形式 3

1.4 复数的模 4

2 复向量空间 5

1 复数域

1.1 复数的基本定义

定义 1. 一个复数是个满足以下条件关系的有序实数对 (a,b):

1. 设 x=(a,b),y=(c,d) 是两个复数，当且仅当 a=c 并且 c=d 时 x=y;
2. 加法:(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)
3. 乘法:$(a,b) \times (b,d) = (a \times c - b \times d, a \times d + b \times c)$

1.2 数域的封闭性

我们将所有的复数的集合记做 $\boldsymbol{C}$.

$\boldsymbol{C} = \{(a,b)|a \in R, b \in R\}$

下面我们来证明所有的复数构成一个数域。即它的加法和乘法是封闭的。

1.2.1 加法

定理 1. *如果* $x \in \boldsymbol{C}, y \in \boldsymbol{C}$, *那么* $x + y \in \boldsymbol{C}$.

证明. 显然 □

定理 2. *如果* $x \in \boldsymbol{C}, y \in \boldsymbol{C}$, *那么* $x + y = y + x$.

证明. 设 x = (a,b),y = (c,d).
则 x+y = (a,b) + (c,d) = (a+c,b+d) = (c+a,b+d) = y+x □

定理 3. *如果* $x, y, z \in \boldsymbol{C}$, *那么* $(x + y) + z = x + (y + z)$.

证明. 设 x = (a,b),y = (c,d),z = (e,f)
则

$$\begin{aligned}(x + y) + z &= (a + c, b + d) + (e, f)\\ &= (a + c + e, b + d + f)\\ &= (a, b) + (c + e, d + f) = x + (y + z)\end{aligned}$$

□

定理 4. $\boldsymbol{C}$ *含有元素 0，对于每个* $x \in \boldsymbol{C}$, *有 0+x=0*

证明. 设 x = (a,b)
x+0 = (a,b) + (0,0) = (a,b) =x □

定理 5. $\forall x \in \boldsymbol{C}, \exists -x \in \boldsymbol{C}$, *满足 x+(-x)=0*

证明. 设 x = (a,b)，令 -x=(-a,-b), 则 x+(-x)=0 □

1.2.2 乘法

定理 6. *如果* $x \in \boldsymbol{C}, y \in \boldsymbol{C}$, *那么* $x \times y \in \boldsymbol{C}$.

证明. 显然 □

定理 7. *如果* $x \in \boldsymbol{C}, y \in \boldsymbol{C}$, *那么* $x \times y = y \times x$.

证明. 设 x = (a,b),y = (c,d).
则 $x \times y$ = (a,b)(c,d) = (ac,bd) = (ca,bd) = $y \times x$ □

定理 8. *如果* $x, y, z \in \boldsymbol{C}$, *那么* $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.

证明. 设 x = (a,b),y = (c,d),z = (e,f)
则

$$\begin{aligned}(x \times y) \times z &= (ac - bd, ad + bc)(e, f) \\ &= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce) \\ &= (a, b)(ce - df, cf + de) \\ &= x \times (y \times z)\end{aligned}$$

□

定理 9. *$\boldsymbol{C}$ 含有元素 $1 \neq 0$，对于每个 $x \in \boldsymbol{C}$, 有 $1 \times x = 0$*

证明. 设 x = (a,b)
$1 \times x = (1, 0)(a, b) = (a, b)$ □

定理 10. *如果 $x \in \boldsymbol{C}$ 且 $x \neq 0$, 则 $\exists 1/x \in \boldsymbol{C}$, 满足 $x \times 1/x = 1$.*

证明. 设 x = (a,b). 如果 $x \neq 0$, 则 $x \neq 0$ 或 $y \neq 0$.$\therefore$ $a^2 + b^2 > 0$. 于是我们可以定义

$$\frac{1}{x} = (\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{b}{a^2 + b^2})$$

则 $x \times \frac{1}{x} = (1, 0) = 1$. □

1.2.3 分配律

定理 11. *如果 $x, y, z \in \boldsymbol{C}$, 那么 $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$.*

证明. 设 x = (a,b),y = (c,d),z = (e,f)
则

$$\begin{aligned}x \times (y + z) &= (a, b)(c + e, d + f) \\ &= (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be) \\ &= (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be) \\ &= x \times y + x \times z\end{aligned}$$

□

1.3 复数的代数形式

至此，我们已经证明 $\boldsymbol{C}$ 满足域的 11 条公理。我们称由所有复数组成的集合为复数域。可以证明，集合 $\{(a, 0) | a \in \boldsymbol{R}\}$ 构成 $\boldsymbol{C}$ 的一个子域，并且拥有和实数域完全相同的运算性质，于是我们把 $\boldsymbol{R}$ 看作是 $\boldsymbol{C}$ 的一个子集, 并定义

定义 2. 复数 (a,0) 简写为 a

定义 3. 复数 (0,1) 简写为 i

于是由此可得

定理 12. *(a,b) = a + bi*

证明. (a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b,0)(0,1) = a + bi □

定义 4. 对于每个复数 (a,b),a 称为该复数的实部, 记做 Re(z)。b 称为该复数的虚部，记做 Im(z)。

定义 5. 若 z=(a,b), 则 $\bar{z} = (a, -b)$ 叫做 z 的共轭

定理 13.

$$i^2 = -1$$

证明. $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$ □

定理 14. $\forall z, w \in \boldsymbol{C}$, *满足:*

1. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
2. $\overline{zw} = \bar{z} \times \bar{w}$
3. *如果* $z \neq 0$, *则* $z\bar{z} \in \boldsymbol{R}^+$

证明. 显然，证明从略。 □

1.4 复数的模

定义 6.

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

称作 z 的绝对值，或 z 的模。

定理 15. $\forall z, w \in \boldsymbol{C}$, *满足:*

1. $|z| \geqslant 0$
2. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
3. $|z\bar{z}| = |z|$

4. $|zw| = |z||w|$

5. $||x| - |y|| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x| + |y|$

证明. 1. 显然

2. 显然

3. 显然

4. 显然

5. 先证 $|z+w| \leqslant |z| + |w|$

$$\begin{aligned}
|z+w|^2 &= (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) \\
&= z\bar{z} + \bar{z}w + z\bar{w} + w\bar{w} \\
&= |z|^2 + 2Re(z\bar{w}) + |w|^2 \\
&\leqslant |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 \\
&= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\
&= (|z| + |w|)^2
\end{aligned}$$

□

定理 16. *每个非零复数有且仅有两个复方根。*

证明. □

2 复向量空间